

احتمال شرطی

دو رویت احتمال، وقوع با عدم وقوع یک شایده، می توانند در هر دو رویت بسیارهای دیگر تاثیر گذار باشد. برای ترتیب منطبق است احتمال رخداد شماره A تحت تاثیر رخداد شماره B کاهش یا افزایش میابد. برای مثال: ممکن است اطلاع از بازی برون آسمان منوطا، احتمال باریکی منوطا افزایش دهد. پس لازم است ارتباط و تاثیر دوسویه بر یکدیگر را برای همایمان احتمال هر یک مشخص کنیم. در چنین حالتی بحث احتمال شرطی به وجود می آید.

تعریف: فرض کنید شماره B با احتمال مثبت رخ داده است. احتمال شماره A به شرط B به صورت $P(A|B)$ نوشته شده، و احتمال A به شرط B خوانده می شود. این احتمال به صورت برعکس به هم می خورد:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B|A)$$

مثال: دو تاس پرتاب شدند. اگر جهت ظهور شده باشد. احتمال این که هر دو عدد ۱ باشند، برابر چیست؟

در اینجا حالتی فضای نمونه به صورت $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$ می باشد.

نرخ کننده A بسیار مشاهده عدد ۱ در یکی از تاس ها باشد. همچنین بسیار مشاهده جهت نیز با B نشان داده

شود.

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

پس

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}, \quad A \cap B = \{(1,1)\}$$

مثال، از بین همه خانوارهای شهرستانی خانواده‌ای را به هدف انتخاب می‌کنیم. اگر بخواهیم در این خانواده حاصل یک پیرلاریه
 اتصال این که در این خانواده آنها دارای یک دختر باشد برابر است با،

(تعدادهای نمونه خانوارهای که دارای سه دختر هستند عبارت است از،

$$S = \{(پ، پ، پ)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (د، د، پ)، (د، پ، د)\}$$

$$\{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (د، د، پ)، (د، پ، د) \} = \{ (خانواده حاصل یک پسر)، (پسار د)، (د پسر د) \}$$

$$\{ (پ، پ، پ)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (د، د، پ)، (د، پ، د) \} = \{ (خانواده آنها یک دختر)، (پسار د) \} \rightarrow \text{سوال ما}$$

$$A \cap B = \{ (د، د، د)، (د، د، پ)، (د، پ، د) \} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{4}{8} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4}$$

باید چقدر است؟

دو تا از اینها می آید و در ۷ آید و در ۲ آید

$$S = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4) \dots (4,1)(4,2) \dots (4,4)\}$$

دو تا از اینها می آید و در ۷ آید و در ۲ آید و در ۳ آید و در ۴ آید

$$\rightarrow P(B) = \frac{4}{24}$$

دو تا از اینها می آید و در ۷ آید و در ۲ آید و در ۳ آید و در ۴ آید و در ۵ آید و در ۶ آید و در ۷ آید

$$A \cap B = \{(2,5), (5,2)\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{24}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{24}}{\frac{4}{24}} = \frac{1}{2}$$

مثال: دو تاس را پیاپی ۱۰۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم. متوجه می‌شویم که در هر بار که ظاهر شده اند یکسان نیستند، احتمال آن که مجموع ۷ بیاید کدام است؟

تسری فضای نمونه برای یک تاس به صورت زیر است: $\{ (1,1), (1,2), \dots, (6,6) \}$

در نمونه ظاهر شده یکسان همیشه ۵ شرط دارد: $\{ (1,2), (2,1), \dots, (6,6) \}$

$$P(B) = \frac{10}{36}$$

۷ شاهد می‌شود (مجموع) $A = \{ (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) \}$ سوال ساله

$$A \cap B = \{ (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) \} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

حلول احتمال شرطی

۱. احتمال شرطی نامعنی است. زیرا بنا به تعریف احتمال شرطی، مشعل است که در رابطه ذکر شده، خروج نامعنی و صورت غیر نامعنی است. در نتیجه نسبت این «سیر نامعنی» خواهد بود.

۲. مقدار احتمال شرطی برای فضای نمونه برابر با ۱ است، زیرا

$$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

۳. احتمال شرطی، $A_1 \cup A_2$ وقتی که A_1 و A_2 نامساکن باشند، برابر با مجموع احتمال A_1 به شرط B و A_2 به شرط B

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

است. بزرگان داریم

استقلال دوپایه

اگر درجهت اتصال شری، و خود پیاده B در اتصال، خود پیاده A هیچ تأثیری نداشته باشد، آن گاه پیاده A را مستقل از B می گویند. «این حالت براساس رابطه شری داریم»

$$P(A|B) = P(A)$$

مثال: فرض کنید دریاب بزرگ پیاده A، خود در شیر و B نیز خود دو خط باشد. در این صورت دوپایه را نگارها هستند ولی از هم مستقل نیستند زیرا:

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \rightarrow B \text{ و } A \text{ را نگارها هستند}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

→ B و A مستقل نیستند

مثال. در برآیند یک سکه و یک تاس ششگانه A ، رخداد زیر رخداد عدد ۱ باشد. این دو پدیده مستقل هستند ولی ارقام نامکمل و وابسته به یکدیگرند.

فضای نمونه $S = \{(خط و ۱), (تیر و ۱), (خط و ۲), (تیر و ۲), (خط و ۳), (تیر و ۳), (خط و ۴), (تیر و ۴), (خط و ۵), (تیر و ۵), (خط و ۶), (تیر و ۶)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} \neq 0 \quad \rightarrow \quad A \text{ و } B \text{ نامکمل و وابسته}$$

$$\{ (تیر و ۶), (تیر و ۵), (تیر و ۴), (تیر و ۳), (تیر و ۲), (تیر و ۱) \} = \text{پدیده } A \text{ رخداد زیر}$$

$$\{ (خط و ۱), (خط و ۲), (خط و ۳), (خط و ۴), (خط و ۵), (خط و ۶) \} = \text{پدیده } B \text{ رخداد زیر}$$

$$A \cap B = \{ (تیر و ۱) \}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{14} \neq 0$$

→ مستقلة B, A

$$P(A) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

• مستقلة B, A

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{14}} = \frac{1}{7}$$